

Höhere Ableitungen

Die Ableitung f' einer gegebenen Funktion f ist wieder eine Funktion. Differenziert man diese Funktion f' , so erhält man eine neue Funktion $(f')' = f''$ (Zweite Ableitung).

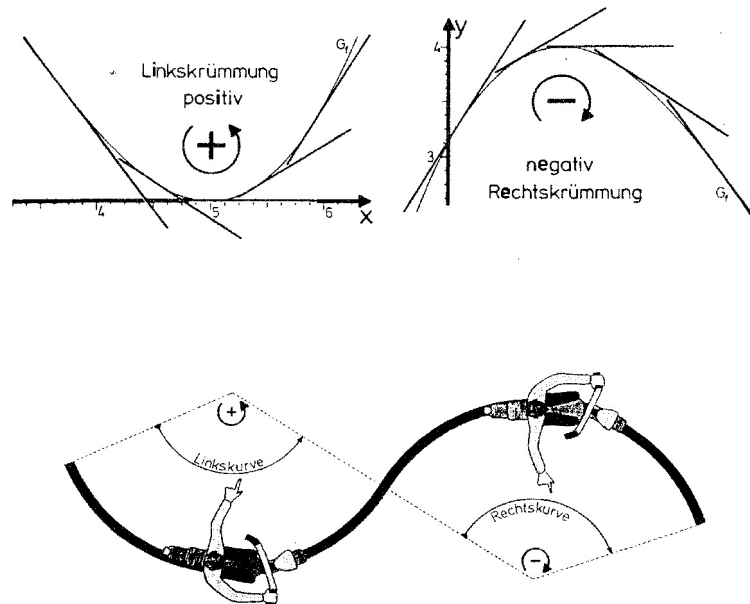
Genauso entsteht f''' aus f'' , $f^{(4)}$ aus f''' usw.

Schreibweise: $f^{(n)}$ ist die n-te Ableitung von f

Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung:

$f'' > 0$: Tangentensteigungen nehmen zu, d.h. G_f ist linksgekrümmt.

$f'' < 0$: Tangentensteigungen nehmen ab, d.h. G_f ist rechtsgekrümmt.



Einen Punkt, an dem die 2. Ableitung Null ist, nennt man Flachpunkt.

Ändert sich am Flachpunkt das Krümmungsverhalten, nennt man ihn Wendepunkt.

Die Tangente im Wendepunkt nennt man Wendetangente.

Sonderfall:

Gilt für eine Stelle x_0 $f'(x_0) = 0$ und ist x_0 eine Wendestelle, so liegt an der Stelle x_0 ein Terrassenpunkt vor.

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 6x - 2$$

Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Prüfen, ob Wendepunkt:

Skizze von f'' :

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ist Wendestelle}$$

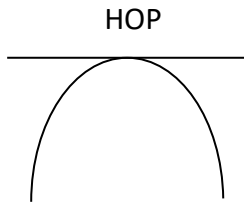
Maximale Krümmungsintervalle:

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right]$ und linksgekrümmt in $\left[\frac{1}{3}; \infty \right[$

Bestimmung der y-Koordinate: $x = \frac{1}{3}$ in f

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 = \frac{52}{27} \Rightarrow \text{WP}\left(\frac{1}{3} / \frac{52}{27}\right)$$

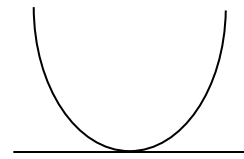
Bedeutung der 2. Ableitung für das Bestimmen der Art der Extrema:



1. Bedingung: $f'(x_0) = 0$

Beim Hochpunkt ist die Kurve
offensichtlich rechtsgekrümmt

$\Rightarrow f''(x_0) < 0$



TIP

1. Bedingung: $f'(x_0) = 0$

Beim Tiefpunkt ist die Kurve
offensichtlich linksgekrümmt

$\Rightarrow f''(x_0) > 0$

Es gilt:

1) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle x_0

2) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle x_0

Bei der Untersuchung auf Wendepunkte gilt:

1) $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle x_0

2) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt an der Stelle x_0

Bemerkung:

Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) = 0$, folgt nicht zwangsläufig, dass an der Stelle x_0 kein Wendepunkt vorliegt.

Aufgaben:

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 - 20x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f .

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte von f .

1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von f .

1.4 Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.

1.5 Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $[-4;6]$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

2.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 8$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

2.1 Bestimmen Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f .

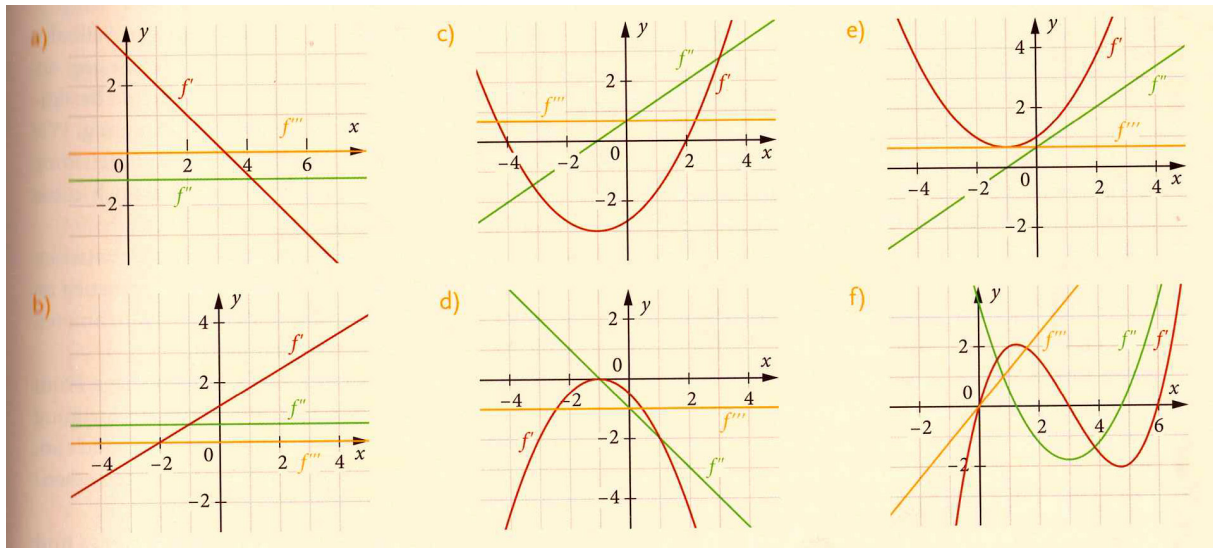
2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte von f .

2.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von f .

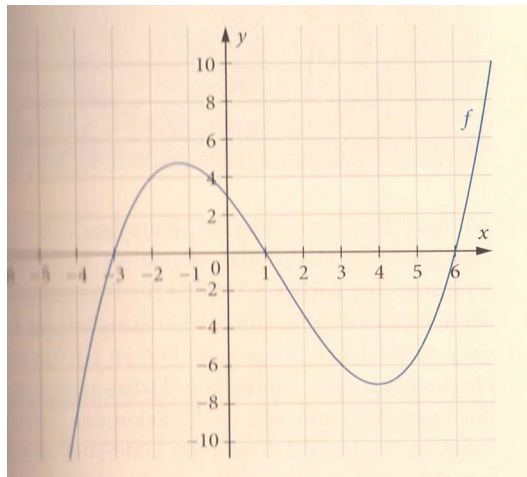
2.4 Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.

2.5 Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $[-1,25;1]$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

3 Die Abbildungen zeigen die ersten drei Ableitungen einer ganzrationalen Funktion f . Ermitteln Sie die Lage und Art der Extrem- und Wendestellen von f und begründen Sie Ihre Lösung. ☹



4.0 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidungen mithilfe des Graphen von f . ☹



4.1 $f(-2) = 4$

4.2 $f(0) = -3$


4.3 $f(0) = 3$

4.4 $f'(4) = 0$

4.5 $f'(5) > 0$

4.6 $f''(4) > 0$

5.0 Es sei f eine ganzrationale Funktion 5. Grades.

Beurteilen Sie die folgenden Aussagen. 

5.1 f hat mindestens drei Nullstellen.

5.2 f hat höchstens fünf Nullstellen.

5.3 G_f hat mindestens einen Extrempunkt.

5.4 G_f hat höchstens drei Extrempunkte.

5.5 G_f hat mindestens einen Wendepunkt.

5.6 G_f hat höchstens drei Wendepunkte.


5.7 G_f muss punktsymmetrisch sein.

5.8 f kann eine fünffache Nullstelle haben.

5.9 Für $x \rightarrow \infty$ gilt auch immer $f(x) \rightarrow -\infty$.

5.10 Alle Funktionswerte von f können negativ sein.

6.0 Fertigen Sie, soweit möglich, eine Skizze der beschriebenen Graphen an.

Erläutern Sie gegebenenfalls, warum es nicht möglich ist. 

6.1 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat in $E(2/4)$ einen Extrempunkt.

6.2 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die x -Achse bei -1 und hat den Wendepunkt $W(1/-2)$.

6.3 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat in $W(4/3)$ einen Wendepunkt.

6.4 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y -Achse und, schneidet diese bei 2 und hat einen Extrempunkt in $E(2/4)$.

6.5 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat in $H(-3/3)$ einen Hochpunkt und in $T(1/0)$ einen Tiefpunkt. Er besitzt keinen weiteren Extrempunkt.

6.6 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat in $T(-3/0)$ einen Terrassenpunkt und in $E(0/6)$ einen Extrempunkt.

7.0 Geben Sie mindestens zwei mögliche Funktionsterme für eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften an. ●

7.1 Die Funktion hat ein lokales Maximum bei $x = 2$ und ein lokales Minimum bei $x = 3$.

7.2 Die Funktion hat bei $x = -1$ eine Terrassenstelle und bei $x = 3$ ein lokales Minimum.

7.3 Die Funktion hat bei $x = 4$ ein globales Maximum.

7.4 Die Funktion hat bei $x = 0$ und bei $x = 2$ ein globales Minimum.

8.0 Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Formulieren Sie falsche Aussagen so um, dass sie mathematisch korrekt sind. ⊘

8.1 Der Graph einer quadratischen Funktion hat immer ein lokales Extremum.

8.2 Der Graph einer Funktion 3. Grades besitzt genau einen Wendepunkt.

8.3 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat drei Extrempunkte.

8.4 Zwischen zwei Extrempunkten liegt immer ein Wendepunkt.

8.5 Zwischen zwei Wendepunkten liegt immer ein Extrempunkt.

8.6 Es gibt einen Graphen, der einen Wendepunkt, aber keine Extremstellen besitzt.

8.7 Eine Funktion 5. Grades hat vier Wendepunkte.

8.8 Gilt $f''(x_E) = 0$, so liegt an der Stelle x_E eine Extremstelle vor.

8.9 Fehlt bei einer ganzrationalen Funktion 3. Grades das quadratische Glied, dann liegt der Wendepunkt auf der x-Achse.

Lösungen:

1.1 Nullstellen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 - 20x) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x(x^2 - 2x - 20) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 20 &= 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{84}}{2} = 1 \pm \sqrt{21} \\ \Rightarrow x_2 &= 1 + \sqrt{21} \quad (\approx 5,58) \quad x_3 = 1 - \sqrt{21} \quad (\approx -3,58) \\ \Rightarrow f &\text{ hat drei Nullstellen bei } x_1 = 0 \text{ (einfach), bei } x_2 = 5,58 \text{ (einfach)} \\ &\text{ und bei } x_3 = -3,58 \text{ (einfach)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.2 \quad f'(x) &= \frac{1}{4}(3x^2 - 4x - 20) \Rightarrow \frac{1}{4}(3x^2 - 4x - 20) = 0 \\ \Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 &= 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-20)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{4 \pm 16}{6} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{10}{3} \quad x_2 = -2\end{aligned}$$

Art der Extrema:

1. Möglichkeit: Skizze von f'

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10}{3} \text{ TP} \quad x_2 = -2 \text{ HP}$$

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{1}{4}(6x - 4) = \frac{3}{2}x - 1 \\ f''\left(\frac{10}{3}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} - 1 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{10}{3} \text{ TP} \\ f''(-2) &= \frac{3}{2} \cdot (-2) - 1 < 0 \Rightarrow x_2 = -2 \text{ HP}\end{aligned}$$

y-Koordinaten:

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = -12 \frac{26}{27} \Rightarrow \text{TP}\left(\frac{10}{3} / -12,96\right) \quad f(-2) = 6 \Rightarrow \text{HP}(-2 / 6)$$

$$1.3 \quad f''(x) = \frac{1}{4}(6x-4) \Rightarrow \frac{1}{4}(6x-4) = 0 \Rightarrow 6x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

1. Möglichkeit: Skizze von f''

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \text{WP}$$

2. Möglichkeit:

$$f'''(x) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}$$

$$f'''(\frac{2}{3}) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \text{WP}$$

y-Koordinate:

$$f(\frac{2}{3}) = -3 \frac{13}{27} \Rightarrow \text{WP}(\frac{2}{3} / -3,48)$$

1.4 Wendetangente: $y = mx + t$

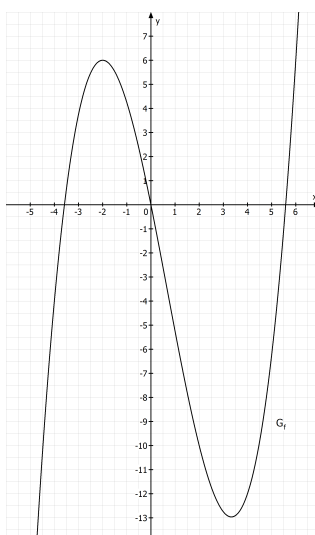
$$m = f'(\frac{2}{3}) = -5 \frac{1}{3}$$

$$\text{WP}(\frac{2}{3} / -3 \frac{13}{27}) \text{ einsetzen: } -3 \frac{13}{27} = -5 \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + t \Rightarrow t = \frac{2}{27}$$

$$\Rightarrow y = -5 \frac{1}{3}x + \frac{2}{27}$$

1.5

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	-4	3,75	6	4,25	0	-5,25	-10	-12,75	-12	-6,25	6



2.1 Nullstellen:

$$6x^3 - 2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow \text{Ausprobieren: } x_1 = -1$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 (6x^3 - 2x^2 + 8) : (x + 1) = 6x^2 - 8x + 8 \\
 \underline{-(6x^3 + 6x^2)} \\
 -8x^2 + 8 \\
 \underline{-(-8x^2 - 8x)} \\
 8x + 8 \\
 \underline{-(8x + 8)} \\
 \text{-----}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 6 \cdot 8}}{12} = \frac{8 \pm \sqrt{-128}}{12} \quad (f)$$

$\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle bei $x_1 = -1$ (einfach)

2.2 $f'(x) = 18x^2 - 4x$

$$\Rightarrow x(18x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{2}{9}$$

Art der Extrema:

1. Möglichkeit: Skizze von f'

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ HP} \quad x_2 = \frac{2}{9} \text{ TP}$$

2. Möglichkeit:

$$f''(x) = 36x - 4$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ HP}$$

$$f''\left(\frac{2}{9}\right) = 36 \cdot \frac{2}{9} - 4 > 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{9} \text{ TP}$$

y-Koordinaten:

$$f(0) = 8 \Rightarrow \text{HP}(0/8) \quad f\left(\frac{2}{9}\right) = 7\frac{235}{243} \Rightarrow \text{TP}\left(\frac{2}{9}/7,97\right)$$

$$2.3 \quad f''(x) = 36x - 4 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

1. Möglichkeit: Skizze von f''

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ WP}$$

2. Möglichkeit:

$$f'''(x) = 36$$

$$f'''(\frac{1}{9}) = 36 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ WP}$$

y-Koordinate:

$$f(\frac{1}{9}) = 7 \frac{239}{243} \Rightarrow \text{WP}(\frac{1}{9} / 7,98)$$

2.4 Wendetangente: $y = mx + t$

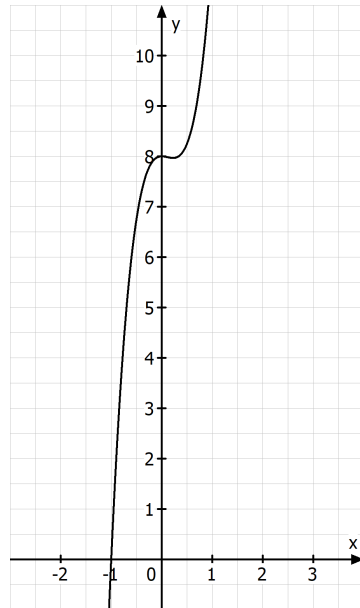
$$m = f'(\frac{1}{9}) = -\frac{2}{9}$$

$$\text{WP}(\frac{1}{9} / 7 \frac{239}{243}) \text{ einsetzen: } 7 \frac{239}{243} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} + t \Rightarrow t = 8 \frac{2}{243}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{9}x + 8 \frac{2}{243}$$

2.5

x	-1,25	-1	-0,5	0	0,5	1
f(x)	-6,84	0	6,75	8	8,25	12



3a) HOP bei $x=3$; kein Wendepunkt;

3b) TIP bei $x=-2$; kein Wendepunkt;

3c) HOP bei $x=-4$; TIP bei $x=2$; Wendepunkt bei $x=-1$;

3d) keine Extremstellen; Terrassenpunkt bei $x=-1$;

3e) keine Extremstellen; Wendepunkt bei $x=-1$;

3f) TIP bei $x=0$; HOP bei $x=3$; TIP bei $x=6$; Wendepunkte bei $x=1$ und $x=5$;

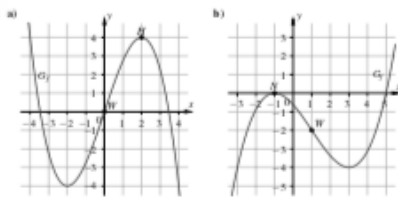
4.1 Richtig. 4.2 Falsch. 4.3 Richtig. 4.4 Richtig.

4.5 Richtig. 4.6 Richtig.

5.1 Falsch. 5.2 Richtig. 5.3 Falsch. 5.4 Falsch. 5.5 Richtig.

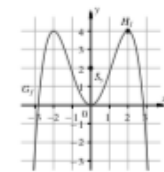
5.6 Richtig. 5.7 Falsch. 5.8 Richtig. 5.9 Falsch. 5.10 Falsch.

6.

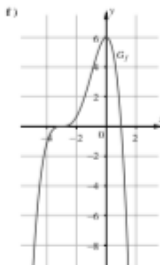


c) Ist der Graph einer geraden Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung, so liegt der Wendepunkt im Ursprung. Ebenso gilt für $W(4|5)$ der Wendepunkt des Graphen einer geraden Funktion dritten Grades, so ist der Graph nicht punktsymmetrisch zum Ursprung. Bei Punktsymmetrie zum Ursprung wäre dann auch $W'(-4|-5)$ ein Wendepunkt des Graphen. Das wiederum steht im Widerspruch dazu, dass eine geraden Funktion dritten Grades genau eine Wendestelle hat.

d)



e) Der Graph einer Funktion vierten Grades beginnt im III. und endet im IV. Quadranten, wenn der erste Extrempunkt ein Hochpunkt ist. Wenn auf den Hochpunkt ein Tiefpunkt folgt und keine weiteren Extremstellen existieren, verläuft der Graph in den I. Quadranten und kann somit nicht Grad vier haben.



7.1 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 7$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 5$

7.2 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 4$ $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 1,5x^2 + 2$

$$7.3 \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 2 \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 8x^2 - 1$$

$$7.4 \quad f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad f(x) = x^6 - 4x^5 + 4x^4$$

8.1 Richtig.

8.2 Richtig.

8.3 Falsch.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat höchstens drei Extrempunkte.

8.4 Richtig.

8.5 Falsch.

Zwischen zwei Wendepunkten liegt nicht immer ein Extrempunkt.

8.6 Richtig.

8.7 Falsch.

Eine Funktion 5. Grades besitzt höchstens drei Wendepunkte.

8.8 Falsch.

Gilt $f''(x_E) \neq 0$, so liegt an der Stelle x_E eine Extremstelle vor.

8.9 Falsch.

Fehlt bei einer ganzrationalen Funktion 3. Grades das quadratische und das konstante Glied, dann liegt der Wendepunkt auf der x-Achse.